

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО - СТАРА ЗАГОРА

Общински кръг на олимпиадата по математика - 06.03.2005 година

IV клас

1 зад. Всеки ученик от IV^a клас участва в извънкласни занимания – 8 ученика плуват, 14 ученика танцуват, а 9 – са в школа по математика. Трима от плувците са танцьори, четирима от танцьорите са математици, но никой математик не е плувец. Колко са учениците в класа? Колко от тях са само плувци, само танцьори или само в школата по математика?

2 зад. В двора на детска градина построили квадратен басейн с външна обиколка 16 м. Около басейна е предвидена плажна пясъчна ивица, широка 2 м. С колко тритонни самосвала трябва да се достави пясък за запълване на ивицата, ако за един квадратен метър са необходими 200 кг пясък?

3 зад. На въпроса “Колко са участниците в олимпиадата по математика?”, трима преподаватели – квестори отговорили: първият – по-малко от 61; вторият – по-малко от 62; третият – по-малко от 63.

Колко са участниците в олимпиадата, ако е известно, че един от квесторите е отговорил неправилно?

V клас

1 зад. На състезание по математика участват повече от 80 и по-малко от 90 ученика. Третината от тях са момичета, половината от които са в пети клас. От момчетата $\frac{5}{7}$ не са от пети клас. Колко ученици от пети клас участват в състезанието?

2 зад. Докажете, че ако числото $\overline{abcd}$ се дели на 11, то числото $\overline{ab} + \overline{cd}$ също се дели на 11.

3 зад. В двора на училището играли трима ученици от пети клас и шести клас. Директорът на училището попитал всеки от тях: “Колко от приятелите ти, с които играеш са петокласници?” Първият отговорил: “Нито един”, а вторият: “Един”. Известно е, че петокласниците отговарят правилно, а шестокласниците – лъжат. Отгатнете отговора на последния ученик. Колко са петокласниците, които играят на двора?

VI клас

1 зад. Един килограм телешко месо без кости струва 6 лв., а килограм телешко с кости – 5,13 лв. Костите без месо се продават по 0,20 лв. за килограм. Колко грама кости съдържа един килограм телешко месо?

2 зад. В един клас учат 27 ученици. Момчетата са повече от момичетата. Ако всяко момче от класа купи по един кроасан, а всяко момиче – шоколад, то те ще похарчат с 1 стотинка по-малко отколкото, ако момчетата купят по един шоколад, а момичетата по един кроасан. Колко са момчетата в класа?

3 зад. Естествените числа x и y са такива, че $34x=43y$. Намерете най-малкия възможен брой делители на числото $x+y$.

VII клас

1 зад. Докажете, че ако $\frac{b}{a(a+b)} + \frac{c}{b(b+c)} + \frac{a}{c(c+a)}$ е цяло число, то $\frac{a}{b(a+b)} + \frac{b}{c(b+c)} + \frac{c}{a(c+a)}$ е също цяло число.

2 зад. Ъгъл BAC на триъгълник ABC е равен на 120° . Върху ъглополовящата на този ъгъл е взета точка D такава, че $AD=AB+AC$. Намерете ъглите на триъгълник BCD.

3 зад. Върху върховете на куб са поставени числата от 1 до 8. Върху всяка стена на куба е записан сборът на числата при върховете и. Възможно ли е върху стените на куба да бъдат записани шест последователни естествени числа?

VIII клас

1 зад. Пресметнете $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$, ако е известно, че $a+b+c=7$ и $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 0,7$.

2 зад. Хипотенузата АВ на правоъгълен триъгълник ABC има дължина 1. Точките $C_1, C_2, C_3, \dots, C_{200}$ делят АВ на равни отсечки. Намерете дължината на вектора $\overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{CC_2} + \overrightarrow{CC_3} + \dots + \overrightarrow{CC_{200}}$.

3 зад. Точките D и E лежат съответно върху катетите BC и AC на правоъгълния триъгълник ABC. Точките P, Q, M и N са среди съответно на отсечките ED, AB, AD и BE. Намерете дължината на отсечката PQ, ако дължината на отсечката MN е 1.

IX клас

1 зад. Пресметнете $x+y$, ако $x^3+y^3=9$ и $x^2y+xy^2=6$

2 зад. Точките K, M, N и P са среди съответно на страните AB, BC, CD и DA на изпъкналия четириъгълник ABCD. Отсечките AM и CK се пресичат в точка E, а отсечките AN и CP – в точка F. Намерете лицето на четириъгълника AECF, ако лицето на ABCD е 12.

3 зад. Докажете, че числото $1999.2001.2003.2005 + 16$ е квадрат на естествено число.

X клас

1 зад. Известно е, че уравненията $x^2+2bx+a=0$ и $x^2+2ax+b=0$ имат реални корени, където $b>0$ и $a>0$. Произведението на корените на двете уравнения е 1. Намерете b и a .

2 зад. Диагоналите на трапец ABCD ($AB \parallel CD$) се пресичат в точка O. Докажете, че окръжностите, описани около триъгълниците AOB и COD се допират.

3 зад. Докажете, че ако $x>0, y>0, z>0$ и $xyz=0,5$, то $\frac{xy^2}{x^3+1} + \frac{yz^2}{y^3+1} + \frac{zx^2}{z^3+1} \geq 1$.

XI клас

1 зад. Нека x, y и z са различни реални числа, такива, че числата x, y, z образуват в посоченият ред геометрична прогресия и числата $\frac{1}{x+2005}, \frac{1}{y+2005}, \frac{1}{z+2005}$ образуват в посоченият ред аритметична прогресия. Да се намери y .

2 зад. Между страните a, b и c на триъгълник ABC съществува зависимостта $a+b=3c$. Пресметнете $\cot g \frac{\alpha}{2} \cot g \frac{\beta}{2}$, където ъглите α и β са съответно срещулежащи на страните a и b .

3 зад. Пресметнете стойността на израза: $(1+\operatorname{tg} 1^0)(1+\operatorname{tg} 2^0) \dots (1+\operatorname{tg} 44^0)$.

XII клас

1 зад. Дадена е функцията $f(t) = t^{2003} + \frac{a}{t^{2005}}$, където a е реален параметър.

а) Определете за кои стойности на a функцията $f(t)$ е растяща в интервала $(-\infty; 0)$.

б) Решете уравнението $\sin^{2003} x + \frac{1}{\cos^{2005} x} = \cos^{2003} x + \frac{1}{\sin^{2005} x}$.

2 зад. Точка M е вътрешна за отсечката AB с дължина 11. Разглеждаме множеството триъгълници ABC. Намерете възможно най-малкото разстояние между центровете на окръжностите, описани около триъгълниците AMC и BMC.

3 зад. Диагоналите AC и BD на четириъгълника ABCD се пресичат в точка O. Петите P, Q, M и N на перпендикулярите, спуснати от точка O към околните стени на пирамидата SABCD, лежат на една равнина. Докажете, че четириъгълник PQMN е вписан в окръжност.